Morphismes continus de $(S^1, \times)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racine de l'unité. Applications.
- 149 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.
- 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- 156 : Exponentielle de matrices. Applications.
- 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Les morphismes continus φ de $(S^1, \times)$ vers $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ sont de la forme*

$$\varphi : e^{it} \mapsto Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{tk_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}^*$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}, R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Preuve :

Analyse :

Soit $\varphi : S^1 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupe continu.

Étape 1 : Montrons qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(e^{it}) = e^{tA}$ (relèvement)

Soit $\psi : t \mapsto \varphi(e^{it})$, ψ est un morphisme de groupe continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.
Montrons que ψ est dérivable.
Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t$, $F \in C^1(\mathbb{R})$ car ψ est continue et $F'(0) = I_n$ d'où $\frac{1}{t}F(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} I_n$.
Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert, $\frac{1}{t}F(t)$ est inversible pour t assez petit. Soit $a > 0$ tel que $\frac{1}{a}F(a) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on a $F(a) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En intégrant la relation $\psi(x+t) \underset{(*)}{=} \psi(x)\psi(t)$ on a

$$\int_0^a \psi(x+t)\,\mathrm{d}t = \psi(x)\int_0^a \psi(t)\,\mathrm{d}t \text{ d'où } \psi(x) = F(a)^{-1}\int_x^{x+a} \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc ψ est dérivable, donc en dérivant $(*)$, on a $\psi'(x+t) = \psi'(t)\psi(x)$ et prenant $t = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = \psi'(0)\psi(x)$. D'où en posant $A = \psi'(0)$, on a $\begin{cases} \psi' & = A\psi \\ \psi(0) & = I_n \end{cases}$ d'où $\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) = e^{tA}$ par caractérisation de l'exponentielle de matrice.

Étape 2 : Montrons que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Comme ψ est $2\pi-$périodique, $e^{tA} = e^{tA+2\pi A} = e^{tA}e^{2\pi A}$ d'où $e^{2\pi A} = I_n$.
Or, $\mathrm{Sp}(e^{2\pi A}) = \{e^{2\pi\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ d'où $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A), e^{2\pi\lambda} = 1$ et donc $\lambda \in i\mathbb{Z}$.
Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme D et N commutent, on a

$$I_n = e^{2\pi A} = e^{2\pi D}e^{2\pi N}$$

Or, D est diagonalisable avec les mêmes valeurs propres que A donc $e^{2\pi D}$ est diagonalisable de valeurs propres $\{e^{2\pi\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\} = \{1\}$.
donc $e^{2\pi D} = I_n$ et $e^{2\pi N} = I_n$.
Par l'absurde, si $N \neq 0$, alors soit $X \in \mathrm{Ker}N^2 \setminus \mathrm{Ker}N$ ($\neq \emptyset$ car l'indice de nilpotence de N est > 1).
On a $e^{2\pi N}X = X + 2\pi NX \neq X$ donc $e^{2\pi N} \neq I_n$. Contradiction. D'où $N = 0$.
Ainsi, $A = D$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Étape 3 : Conclusion

A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont conjugués et à valeurs dans $i\mathbb{Z}$, donc il existe $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}^*$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $A = P\mathrm{diag}(ik_1, -ik_1, \ldots, ik_r, -ik_r, 0, \ldots, 0)P^{-1}$ d'où pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA} = P\mathrm{diag}(e^{ik_1}, e^{-ik_1}, \ldots, e^{ik_r}, e^{-ik_r}, 1, \ldots, 1)P^{-1}$$

Or, on a $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} R_\theta \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$.
Donc il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$e^{tA} = Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{tk_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Comme les deux matrices sont réelles et semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc on peut choisir $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Synthèse :

Soit $\varphi : e^{it} \mapsto \psi(t)$, φ est bien définie car R_{tk} ne dépend que de t modulo 2π. De plus, c'est un morphisme car $\forall k \in \mathbb{Z}, R_{(t+t')k} = R_{tk}R_{t'k}$ et est continue par continuité de cos et sin. $\square$

Références

[1] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 2*. Cassini, 2006.